ARTÍCULO ORIGINAL

Complejidad ontológica y enunciados de problemas matemáticos

Ontological complexity and mathematical problem statements

Víctor Manuel Oxley Insfrán[1]

Resumen

El contexto común, que condiciona la práctica escolar de la resolución de problemas matemáticos, contempla el paso de la enunciación verbal (oral escrita o pictográfica), es decir de la enunciación general (lingüística por lo común) del problema a su resolución en lenguaje matemático; este proceso no es para nada automático, inmediato ni transparente, pues está determinado por lo que denominamos grado de complejidad ontológica-proceso que condiciona la comprensión (interpretación) en términos matemáticos de lo que se plantea- desde el lenguaje coloquial. La complejidad ontológica hace referencia a la oración gramatical en cuanto a su estructura lógica. Esta propuesta teórica postula la fórmula -que denominamos índice de complejidad ontológica (CO)-, como cociente al número que se refiere a la cantidad total de variables que contiene el o los predicados de las proposiciones y el denominador al número total de relaciones entre las variables de los predicados. Se puede usar esta fórmula para la cualificación de los ejercicios en cuanto a la cantidad de referentes y de sus relaciones –contenido ontológico- proporcionándose así una herramienta que brinda otra perspectiva para la labor pedagógica en el aula. Esta investigación, es metaanalítca, se estudian las bases de datos del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo TERCE (de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura – UNESCO - Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe) en lo que respecta a los resultados de los niños del tercer grado de la Educación Escolar Básica del Paraguay, encontrando que el 73% de estos, agrupados en los niveles IV y III de competencia matemática, también alcanzaron el Nivel IV en Lectura, esto lleva a pensar que los niveles superiores de competencia matemática están asociados a los niveles superiores de competencia lectora (lenguaje).

Palabras clave: lenguaje, matemáticas, ontología.

1 Universidad Gran Asunción (UNIGRAN), Paraguay.
Correspondencia: Víctor Manuel Oxley Insfrán. Email: victoroxley@gmail.com
Recibido: 01/04/2019. Aceptado: 08/09/2020.
DOI: http://dx.doi.org/10.26885/rcei.9.1.17

Abstract

The common context, which conditions the school practice of solving mathematical problems, contemplates the passage from verbal enunciation (oral, written or pictographic), that is, from the general enunciation (usually linguistic) of the problem to its resolution in mathematical language , and this process is not at all automatic, immediate or transparent, since it is determined by what we call the degree of ontological complexity-process that conditions the understanding (interpretation) in mathematical terms of what is posed- from colloquial language. Ontological complexity refers to the grammatical sentence as its logical structure. This theoretical proposal postulates the formula- which we call the ontological complexity index (CO)-, as a quotient to the number that refers to the total number of variables that the predicate or predicates of the propositions contain, and the denominator to the total number of relationships between the variables of the predicates. This formula can be used to qualify the exercises in terms of the number of referents and their relationships – ontological content-, thus providing a tool that provides another perspective for the pedagogical work in the classroom. This research, is meta-analytic, the databases of the Third Regional Comparative and Explanatory Study TERCE (of the United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization- UNESCO - Regional Office of Education for Latin America and the Caribbean) with regard to the results of children in the third grade of Basic School Education in Paraguay, finding that 73% of these, grouped in levels IV and III of mathematical competence, also reached Level IV in Reading, this leads to think that higher levels of mathematical competence are associated with higher levels of reading (language) competence.

Keywords: language, mathematics, ontology.

1. Introducción

Una cuestión básica de la enseñanza escolar de las matemáticas es que la adquisición del lenguaje matemático está fuertemente dirigida por los libros de textos, y estos tienen tres importantes aspectos relativos, el vocabulario, la expresión semántica y sus implicaciones psicopedagógicas. En principio, existe una cierta similitud entre la adquisición del lenguaje matemático y la del lenguaje verbal. Se empieza a comprender o ampliar los significados de verbos como juntar, alargar, tomar, sacar, comparar, y de términos como montón, fila, hilera, trozo, docena, ciento, etc. Durante el proceso de enseñanza, con la adquisición de estos conceptos en el aula, será necesaria una larga serie de ejercicios de perfeccionamiento y precisión matemática de dichas expresiones naturales para que el niño vaya poniendo en práctica lo que hasta entonces era solo una intuición referencial o semántica. En el proceso de adquisición del vocabulario matemático es necesario realizar los siguientes ejercicios: de presentación de la palabra -asociándola con el significado correspondiente- y otros que permitan establecer vínculos entre la palabra y su significado, y también al revés, entre las propiedades matemáticas y las palabras con que se expresan, etc. (Rosales López, 1984).

D. Pimm (1987) sostiene que "aprender a hablar y, de modo más sutil, aprender a significar como un matemático, supone adquirir las formas, los significados y los modos de ver que se hallan en el registro matemático" (p. 288).

Las matemáticas han desarrollado su propio lenguaje, el procedimiento para el paso del lenguaje natural (concreto) al formal (abstracto) en la escuela, se desarrolla mediante etapas sucesivas, progresivas; nada fáciles ni transparentes en cuanto comprensión y posterior competencia de sus usos en los escolares, siendo así, y para buscar mejorar estos procesos señalados, se puede plantear ¿Cuál sería un instrumento que permita cuantificar y clasificar la dificultad de los problemas de matemáticas planteados en el aula escolar?

En la riqueza relacional que viene adosada al tema de esta investigación, la de relacionar el aprendizaje de los conceptos matemáticos, su comprensión y uso, surgen interrogantes asociadas como los de ¿Cuáles son los procesos de adquisición, comprensión y uso del lenguaje matemático en el aula escolar? ¿Cómo se relacionan los objetos matemáticos y el lenguaje que los referencia? ¿Cuál es la forma en que se podrían relacionar los objetos matemáticos y sus propiedades, en cuanto ontología y su planteo como índice (fórmula matemática) de medición de grado de complejidad de los enunciados de los problemas matemáticos? Y de manera operativa y práctica ¿En qué condiciones resultaron las competencias lingüísticas de Lectura y las competencias asociadas con la habilidad de resolución de problemas de matemáticas en escolares de Paraguay que participaron en las pruebas TERCE?

De aquí que esta investigación, en pos de aportar un instrumento que permita mejorar la labor de la enseñanza de las matemáticas en la escuela se proponga como objetivo principal: Proponer el cálculo de complejidad ontológica como instrumento que permita cuantificar y clasificar la dificultad de los problemas de matemáticas planteados en el aula escolar. Este procedimiento se puede usar para seleccionar o clasificar ejercicios propuestos a los escolares, según la habilidad que esgriman estos en el nivel en el cual se encuentren, al basarse la cualificación de los ejercicios en cuanto a la cantidad de referentes y de sus relaciones –contenido ontológico- entre estos de los enunciados lingüísticos de problemas de matemáticas escolares, proporcionan otra perspectiva para la labor pedagógica en el aula.

Como objetivos conexos se busca: 1) Mostrar los procesos de adquisición, comprensión y uso del lenguaje matemático en el aula escolar, 2) Describir cómo se relacionan los objetos matemáticos y el lenguaje que los referencia, 3) Formular en una ecuación de cálculo (grado de complejidad de los enunciados de los problemas matemáticos) las relaciones entre los objetos matemáticos y sus propiedades en cuanto a ontología, y 4) Describir las condiciones resultantes en cuanto a competencias lingüísticas de Lectura y las competencias asociadas con la habilidad de resolución de problemas de matemáticas en escolares de Paraguay que participaron de las pruebas TERCE.

En esta investigación se alude a los aspectos teóricos referenciales que hacen a la ontología del lenguaje matemático, se los relaciona para construir el índice de complejidad ontológica, para buscar practicidad y justificar su creación, se los aplica al estudio de las bases de datos del TERCE. Las bases de datos consultadas en esta investigación, en formato del software estadístico SPSS pueden bajarse de la página web de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura – UNESCO- Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe.

En esta investigación se procedió a la construcción de tablas, a partir de las bases de Datos del TERCE en el formato del software estadístico SPSS, correspondientes a los alumnos del tercer grado de Paraguay [PM3_all_TERCE.sav (esta base de datos corresponde a las pruebas de Matemática), PL3.sav (corresponde a las pruebas de Lectura); Logros de Aprendizaje)]. A partir de estas dos bases de datos se creó una nueva, integrada a ellas, asociando al estudiante por su identificador (“idstud”) con sus performances en cuanto nivel alcanzado en Matemáticas y Lectura.

Matemáticas y lenguaje

Las matemáticas han desarrollado su propio lenguaje, el procedimiento para el paso del lenguaje natural (concreto) al formal (abstracto) en la escuela, se desarrolla mediante etapas sucesivas y progresivas. Estas pueden describirse por ejemplo en 1. Operación experimental manipulada con objetos tangibles (Ferrero, 2002). Si el objetivo es que un niño aprenda a sumar dos números enteros positivos, lo recomendable sería que se inicie manipulando objetos del entorno, a continuación, forme grupos con los mencionados objetos y los una, que contabilice el resultado que es la suma; esto permitirá tener una idea de la adición (aumento). 2. Expresión verbal de la operación utilizando el lenguaje oral (Ferrero, 2002). Si el objetivo es el aprendizaje de los números enteros, el proceso sería similar al planteado en el numeral anterior, con la diferencia de que no siempre se aumenta. De ahí la importancia en la utilización de un lenguaje preciso 3. Expresión gráfica de la operación (lenguaje figurativo) para representar con dibujos o esquemas (Ferrero, 2002).

Así por ejemplo, en lenguaje común, la expresión “un número real” encuentra su equivalente en lenguaje matemático en “x”; así también respectivamente “el doble de un número real” se expresaría 2x, la “Regla de correspondencia de una función real f” sería $y = f(x)$, y los ejemplos se pueden extender. No se debe olvidar que lo anterior, así como se lo presenta, es el fruto de una evolución histórica.

Significado, sentido y referencia

Todos los predicados, proposiciones y teorías, tienen como asunto (se refieren a algo) ya sea concreto o abstracto (Bunge, 1974a).

Una proposición fuera de contexto carece de significado preciso. Para determinar los referentes de una proposición es preciso analizar los predicados que figuran en ella, a su vez, la clase de referencia de un predicado está determinada por su dominio de definición (Bunge, 1974b).

Un predicado puede analizarse como una función a partir de individuos (o n-tuplas de individuos) hasta el conjunto de todas las proposiciones que contienen el predicado en cuestión.

El contexto común, que condiciona la práctica escolar de la resolución de problemas matemáticos, contempla el paso de la enunciación verbal (oral escrita o pictográfica), es decir de la enunciación general (lingüística por lo común) del problema a su resolución en lenguaje matemático, y este proceso no es para nada automático, inmediato ni transparente, pues está determinado por lo que conocemos como grado de complejidad ontológica -proceso que condiciona la comprensión (interpretación) en términos matemáticos de lo que se plantea- desde el lenguaje coloquial.

Complejidad ontológica

La complejidad ontológica hace referencia a la oración gramatical en cuanto a su estructura lógica. Los elementos o variables componentes de las proposiciones y sus predicados están relacionados entre sí, estos hechos hacen que se puedan categorizar en grados de complejidad según el menor o mayor número de relaciones que se encuentren entre las variables que componen los predicados.

La capacidad o competencia de asociar elementos, en menor o mayor número de relaciones, implica operaciones de mayor alcance cognitivo en el niño.

Índice de complejidad ontológica (CO)

J. Simón (1973) propuso asociar el número de proposiciones y el número de oraciones que pueden encontrarse en alguna enunciación lingüística. Así surge la siguiente ecuación que las relaciona en su conocida fórmula de complejidad sintáctica (Salvador Mata, 1984).

$$CP = \frac{\text{n° de proposiciones}}{\text{n° de oraciones}} \times 10$$

Como en nuestro caso, analizaremos predicados a partir de las proposiciones de los enunciados de problemas matemáticos (en sentido lógico-semántico y matemático), podemos postular la relación:

$$CO = \frac{\text{n° de variables de predicados}}{\text{n° de relaciones entre variables}}$$

En esta fórmula que denominamos índice de complejidad ontológica (CO), el cociente es el número que se refiere a la cantidad total de variables que contiene(n) el (los) predicado(s) de la(s) proposición(es), y el denominador alude al número total de relaciones que se dan entra las variables del (de los) predicado(s). En la medida en que el valor del índice de complejidad ontológica se acerque a 0 es más complejo el problema, y viceversa, cuanto más se aleja del 0, se vuelve más simple.

La notación matemática

Las matemáticas de los babilonios no utilizó ningún simbolismo especial para la representación de sus enunciados matemáticos, eso sí su buen sistema de numeración posicional de base 60 (representados en pictogramas) ayudó a que progresaran en esta ciencia y sabemos hoy que llegaron a plantearse ecuaciones de primer, segundo y hasta de tercer grado, razonaban en forma símil a cualquier contemporáneo, pero es tarea muy ardua para nosotros seguir los cálculos de aquellos en ese contexto (Kline, 1992; Rey Pastor & Babini, 1997a). Los egipcios por su parte avanzaron en este sentido pues fueron los primeros que utilizaron símbolos especiales para representar las operaciones de suma y resta (Kline, 1992; Rey Pastor & Babini, 1997a). En Grecia las cosas no fueron tan diferentes, si bien le dieron un gran impulso a la geometría, su notación no era muy práctica, si bien Diofanto aportó progresos al introducir formalismos para representar la unidad, las primeras potencias y los inversos; nadie de su entorno siguió esos caminos (Bell, 1996; Kline, 1992; Rey Pastor & Babini, 1997a). Recién con los árabes habría consecución a estos delineamientos y fue Al-Juarismi quien -retomando los procedimientos de Diofanto- delineó los nuevos rumbos a seguir (Kline, 1992; Bell, 1996). A pesar de lo matizado, las matemáticas llegarían al Renacimiento europeo con la característica de ser tratada desde las bases del lenguaje natural, sin aún definir un lenguaje propio, así podemos hoy rastrear un “algebra retórica” como ejemplo de aquello (Rey Pastor & Babini, 1997b). La notación “sincopada” del algebra –es decir hecha con abreviaturas- para representar tamaños y cantidades mediante letras y las operaciones mediantes símbolos especiales en el periodo que va entre los siglos XV y XVII significarían un progreso en la operativa de esta ciencia; así tenemos por ejemplo los signos “+” y “-“ los introdujo Johannes Widmann en 1489, el de igualdad “=” Robert Recorde en 1557 y los símbolos de desigualdad “< y >” Thomas Harriot (1560-1621). Ya con François Viète (1540-1603) el álgebra se moderniza un poco al incorporar este abreviaturas como ser “*in*” para la operación de la multiplicación, para el cuadrado la abreviatura “*q*” (de *quadratus*) y “*c*” para el cubo (cubus). En fin, se pueden ir agregando las instancias de este progreso de la notación propia del lenguaje de las matemáticas, pero lo que se quiere subrayar es que el progreso mismo de esta ciencia va en paralelo a sus formas de representación simbólica, ya que con ello se hizo posible el ascenso abstractivo, se facilitó la operativa en los mecanismos de cálculos, posibilitando así desarrollos de ideas sutiles y más profundas (Kline, 1992; Rey Pastor & Babini, 1997b).

Una de las propiedades de las matemáticas es que su desarrollo se debe, en gran parte, a que pudo crear su propia forma de expresión escrita, así todos sus conceptos y teorías encuentran una manera precisa en cuanto al sentido, significación y referencia, este gran logro se hizo solo despegándose del lenguaje natural.

Si bien es cierto que no se puede comprender la naturaleza de las matemáticas sólo estudiando sus formalismos, pues estos no son más que traducciones de intuiciones, ideas que guían sus reflexiones, aun así, las matemáticas escritas se pueden considerar como lenguajes más o menos formalizados del pensamiento matemático, el cual constituye su fuente. El pensamiento y el lenguaje están ligados; así el matemático puede, de una parte (del pensamiento al lenguaje) expresar una intuición mediante sistemas axiomáticos, de otra parte (del lenguaje al pensamiento), captar una idea por medio de lo que observa y experimenta manipulando sus formalismos.

Una de las claves de los éxitos matemáticos es que, con el alejamiento del lenguaje natural a favor de la creación de su propio formalismo sintáctico, evita la ambigüedad de la textura abierta del lenguaje común.

Razonar matemáticamente desde el lenguaje natural tiene sus delimitaciones, y siendo así, el plantear problemas de matemáticas desde el lenguaje natural contextualiza en este esquema a quien se sumerge en ello. Uno de los aspectos claves de la enseñanza matemática escolar es el uso práctico de un nuevo lenguaje: el de las matemáticas, con su sintaxis, semántica y pragmática propia. Ahora, al enunciar problemas de matemáticas a los niños en lenguaje natural, esperamos de ellos la suficiente capacidad de traducción en lo que matemáticamente significan, como vemos, este proceso no es transparente ni mucho menos automático, y nos pone en el centro mismo de una gran problemática didáctica.

El proceso de resolución de problemas

Es una práctica muy común en los textos escolares de matemáticas, y por ende, en las prácticas de los profesores, enunciar los problemas de esta materia propuestos para su resolución. Describir los procesos por los cuales el niño debe transitar para abordar la resolución de lo planteado, está caracterizado de muchas maneras por distintos autores que lo abordan sobre distintas perspectivas, así por ejemplo, algunos como Mayer lo entienden dados en dos momentos claves, uno el de representación y otro el de solución (Mayer, 1986). La primera etapa comporta la habilidad de transformar las palabras y los números a una forma de representación cognitiva, por supuesto que esta fase implica que el niño posee la competencia lingüística, semántica y esquemática suficiente para sortearla eficazmente. En la segunda etapa se ponen en acción los mecanismos operativos para dar con una solución a las representaciones construidas, fase que implica que el niño conozca los mecanismos de cálculo para resolver la incógnita que se le pide. Estas fases se dan según las capacidades individuales de los escolares en cuanto a competencias propias y a experiencias en sus desarrollados cognitivos respectivos.

La representación semiótica (Duval, 2004) es producto de un sistema que posee signos, reglas de combinación y estructura. Así el proceso de resolución de problemas matemáticos, presupone la capacidad de traducir entre distintas formas de representación, sean estas por ejemplo la pictórica, verbal y simbólica. Los individuos que desarrollen la capacidad de encontrar equivalencias entre estas formas de representación serán más competentes en los procesos de resolución de problemas matemáticos.

En el nivel del tercer grado de la Educación Escolar Básica, los niños se encuentran en pleno proceso de ensanchamiento y desarrollo de capacidades para aprender y desenvolverse de manera adecuada en la lectura comprensiva. Siendo este el caso, el repertorio de vocabulario de estos está asociado directamente a la complejidad ontológica que puedan contener los enunciados de los problemas que se les plantean. De aquí, la potencialidad de impedimentos o vallas cognitivas para la interpretación de los enunciados en cuanto a comprenderlos y proceder con ellos a una traducción entre niveles de lenguaje (lenguaje natural, sus referentes ontológicos y el lenguaje matemático).

Un típico enunciado de problema escolar de matemáticas muy bien puede darse de este modo:

> Dos niños fueron corriendo a clase y tres niños fueron andando. ¿Cuántos niños llegaron a clase en total?

El enunciado lingüístico refiere a niños que están en diferentes acciones, unos dos corriendo y otros tres caminando, y todos se dirigen a su clase. Así tenemos niños que se relacionan entre ellos por la acción de correr y niños que se relacionan por la acción de caminar, también tenemos una cantidad que se relaciona con los niños corriendo y otra cantidad que se relaciona con los niños caminando. La acción de dirigirse a la clase se relaciona con todos los niños. ¿La enunciación de la incógnita del problema asocia todos los referentes y sus respectivas relaciones? Si bien podemos decir que para resolver el problema solo es necesario relacionar la cantidad de niños que hay en total, y se llega a la solución del problema relacionando las dos cantidades llanamente. Pero todas las relaciones que se dan entre los referentes deben de tenerse en cuenta para la interpretación correcta del problema. Todas las demás relaciones que surgen del enunciado fueron excluidas. El proceso en total se dio en los tres niveles del lenguaje: sintáctico, semántico y pragmático.

El análisis lógico-semántico (desde los presupuestos formales esbozados al principio) nos permite aislar las variables y sus respectivas relaciones. Estas formalizaciones señalan el proceso lógico de pensar el problema a partir del enunciado lingüístico. Estos formalismos no quieren significar sensu estricto las operaciones que los niños deberán secuenciar en sus procesos de resolución, pues estos pueden realizarse por infinitos caminos, pero son una ejemplificación del razonamiento que subyace en los mecanismos cognitivos que los seres humanos ejecutamos en estas situaciones.

Las variables de los predicados son:

1) Todos los niños van a clase.

Para todo *n*, tal que *n* son niños y *n* van a clase: (n) $(Cn \ \& \ En)$

2) Algunos niños corren.

Existen algunos *n*, tal que *n* son niños y *n* corre; $(\exists n)$ $(Cn \ \& \ Mn)$; siendo H la clase de seres humanos, entonces R $(\boldsymbol{n} \in H \ \& \ (C\boldsymbol{n} \ \& \ M\boldsymbol{n})) = \{\boldsymbol{n}, H\}$

3) Algunos niños caminan.

Existen algunos *n*, tal que *n* son niños y *n* camina; $(\exists n)$ $(An \ \& \ On)$; siendo H la clase de seres humanos, entonces R $(n \in H \ \& \ (An \ \& \ On)) = \{n, H\}$

4) El número 2.

Existe algún *p*, tal que *p* es un número y es el 2; $(\exists p)$ $(Np \ . \ p = 2)$; siendo M el sistema conceptual de las matemáticas, podríamos traducir la referencia de m como R $(p \in M \ \& \ p = 2) = \{p, M\}$

5) El número 3.

Existe algún *q*, tal que *q* es un número y es el 3; $(\exists q)$ $(Nq \ . \ q = 3)$; siendo M el sistema conceptual de las matemáticas, podríamos traducir la referencia de *q* como R $(q \in M \ \& \ q = 3) = \{q, M\}$

6) Y la incógnita ***y***.

Existe algún *y*, tal que y es un número; $(\exists y)$ (Ny); siendo M el sistema conceptual de las matemáticas, podríamos traducir la referencia de m como R $(y \in M) = \{y, M\}$

Por otro lado, las relaciones entre variables son 1) Algunos niños que corren y su número cardinal asociado el 2.

$(Cn \ \& \ Mn)R(\ n = 2)$, las variables $(Cn \ \& \ Mn)$ "se corresponden" (R) al número cardinal (x = 2)

y 2) Algunos niños que caminan y su cardinal 3.

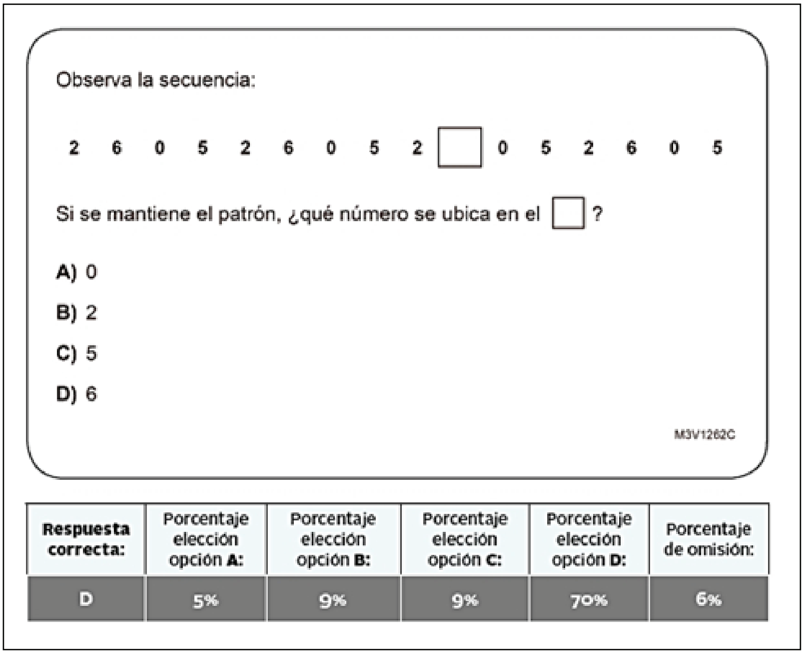
$(An \ \& \ On)R(\ q = 3)$, las variables $(An \ \& \ On)$ "se corresponden" (R) al

número cardinal (x = 3)
Aplicando la fórmula de nuestro índice de complejidad ontológica

$$CP = \frac{\text{n° de variables de predicados}}{\text{n° de relaciones entre variables}} = \frac{6}{2} = 3$$

Siendo el valor del índice 3, este denota la naturaleza simple del problema.

Pasemos a un ejemplo tomado de las pruebas del *Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo* conocido como TERCE, de matemáticas (Flotts, Manzi, Barrios, Saldaña et al., 2016).


Observa la secuencia:

2 6 0 5 2 6 0 5 2 ☐ 0 5 2 6 0 5

Si se mantiene el patrón, ¿qué número se ubica en el ☐ ?

A) 0

B) 2

C) 5

D) 6

M3V1262C

Respuesta correcta:	Porcentaje elección opción A:	Porcentaje elección opción B:	Porcentaje elección opción C:	Porcentaje elección opción D:	Porcentaje de omisión:
D	5%	9%	9%	70%	6%

Figura 1. Problema “m3v1262c” TERCE.
Fuente: (Flotts, Manzi, Barrios, Saldaña et al., 2016, p. 36).

El enunciado de este problema postula dos constructos matemáticos que presuponen el conocimiento de ellos por parte del precoz resolutor, quien aún a expensas de su desconocimiento tiene ante sí los números, uno tras otro -una ‘secuencia’- que lo referencia. De esta línea de números el escolar debe ser capaz de identificar una regularidad en el ordenamiento de los mismos, y esa estructura es lo que el constructo \`patrón\` le significa. Si el patrón es identificado, fácilmente puede compararlo en una inmersión dentro de la secuencia y encontrar la correspondencia del número que falta en el planteo del problema. En términos lógicos podríamos representar el enunciado del problema así:

Si "2 6 0 5 2 6 0 5 2 ***x*** 0 5 2 6 0 5" es la secuencia (***s***) y si se mantiene el patrón "2 6 0 5" (***p***) , entonces ***x*** = ?

En símbolos lógicos

$(s \ \& \ p) \rightarrow x$

Así las variables en los predicados de las proposiciones son las siguientes:

1) El constructo matemático "secuencia".

El término "secuencia" es un constructo matemático. Existe un ***s***, tal que ***s*** es un constructo y ***s*** pertenece a las matemáticas: $(\exists s)\ (Cs \ \& \ Ms)$, lo que podríamos traducir en el sentido de referencia como $R(s \in M \ \& \ Cs) = \{s, M\}$

2) El conjunto de números que conforman la secuencia.

La secuencia se puede representar en notación conjuntista por $s = \{2, 6, 0, 5, 2, 6, 0, 5, 2, x, 0, 5, 2, 6, 0, 5\}$

3) El constructo matemático "patrón".

El término "patrón" es un constructo matemático. Existe un ***p***, tal que ***p*** es un constructo y ***p*** pertenece a las matemáticas: $(\exists p)\ (Cp \ \& \ Mp)$, lo que podríamos traducir en el sentido de referencia como $R\ (p \in M \ \& \ Cp) = \{p, M\}$

4) El conjunto de números que conforman el patrón.

El patrón puede representarse en notación conjuntista por $p = \{2, 6, 0, 5\}$

5) La incógnita ***x*** del problema.

La incógnita a hallar en el problema es un número "*x*", $R(x \in M \ \& \ (p \ \& \ s)) = \{x, M\}$

Las relaciones entre variables son:
1) El patrón "está contenido" en la secuencia.

pR***s***, ***p*** está relacionado con ***s***, el patrón (***p***) "está contenido" (R) en la secuencia (***s***)

2) La incógnita ***x*** "está contenida" dentro del patrón que está contenido -a su vez- en la secuencia.

xR(***p***R***s***), ***x*** está relacionado con R***ps***; la variable "***x***" de la incógnita "está contenida" (R) dentro del patrón (***p***) que está contenido (a su vez) en la secuencia (***s***)

Aplicando la fórmula de nuestro índice de complejidad ontológica

$$CP= \frac{\text{n° de variables de predicados}}{\text{n° de relaciones entre variables}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Obtenemos el valor de 2,5. Este valor denota que el problema no presenta mucha complejidad.

2. Material y Método

Este trabajo es descriptivo basado en el metaanálisis, las bases de datos consultadas en esta investigación, en formato del software estadístico SPSS pueden bajarse de la página web de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura – UNESCO- Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe.

En esta investigación se procedió a construir tablas, desagregando datos, a partir de las bases de Datos del TERCE en el formato del software estadístico SPSS, correspondientes a los alumnos del tercer grado [PM3_all_TERCE.sav (esta base de datos corresponde a las pruebas de Matemática), PL3.sav (corresponde a las pruebas de Lectura); Logros de Aprendizaje)]. A partir de estas dos bases de datos se creó una nueva, integrada a ella, asociando al estudiante por su identificador ("idstud") con sus performances en cuanto nivel alcanzado en Matemáticas y Lectura.

3. Resultados

Tomando el problema identificado dentro de las pruebas de matemáticas del TERCE como "m3v1262c" (PM3_all_TERCE.sav) y construyendo la siguiente Tabla 1 y correspondientes gráficos podemos ver como se desempeñaron los escolares del tercer grado de nuestro país (estos se identificaron a partir de la variable "idecntry"). Hemos asociado-en las bases de datos en formato SPSS- las variables "Respuesta correcta", "Respuesta incorrecta" y "Nivel de desempeño" en una tabla de contingencia.

De entre los niños que alcanzaron a dar una respuesta correcta al ítem, un 42% son de Nivel I, un 28% de Nivel II, un 24% están en el Nivel III y solo un 6% alcanzo el Nivel IV (ver Figura 2 y Figura 3). Ahora si miramos desde otra arista, y asociamos el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas por nivel, encontramos que los del Nivel I son los que más han fallado en dar con la solución del problema, a medida que subimos por los niveles vemos que se va estrechando esta brecha, hasta llegar a una total coincidente de respuestas acertadas para el total de niños en el nivel IV (solo 1 no dio en el blanco, ver Figura 4).

Tabla 1. *De contingencia m3v1262c * Nivel de desempeño*

		Nivel de desempeño				
I		II	III	IV		Total
m3v1262c	Respuesta incorrecta	453	54	22	1	530
	Respuesta correcta	268	181	152	39	640
Total		721	235	174	40	1170

Fuente: elaboración propia.

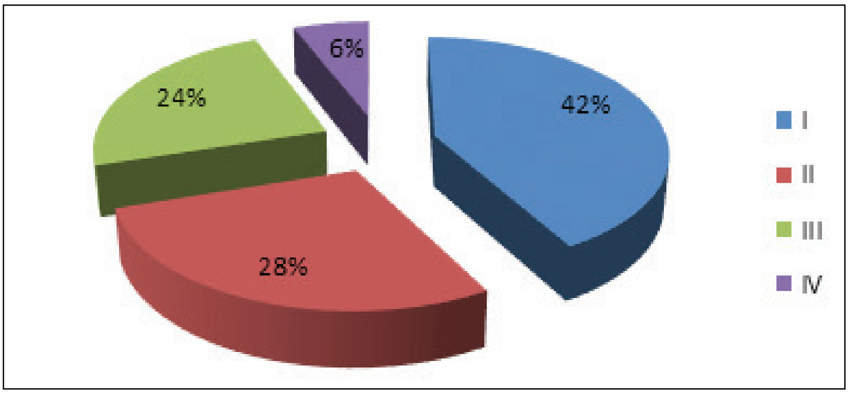


Figura 2. "Respuestas correctas" por Nivel de desempeño en el ítem m3v1262c. Fuente: elaboración propia.

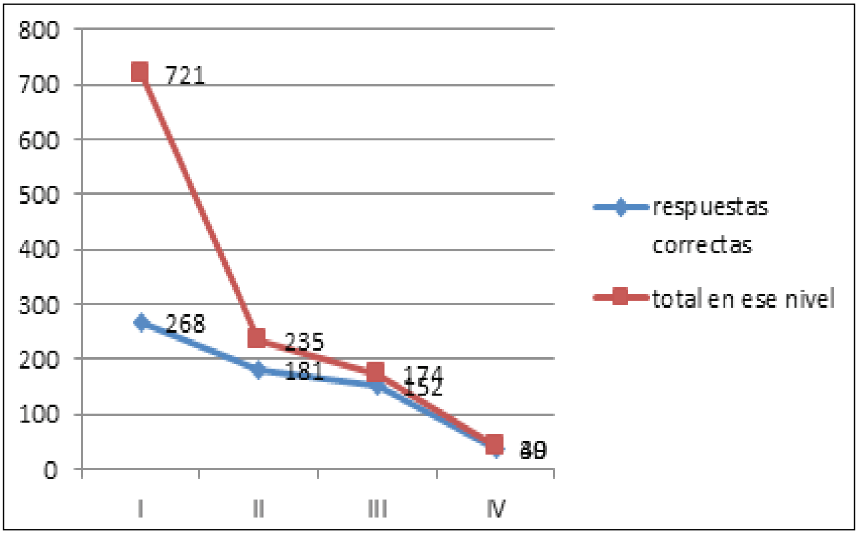


Figura 3. "Respuestas correctas" por Nivel de desempeño en el ítem m3v1262c comparadas con el total de respuestas dadas (incluidas las incorrectas).

Matías visitó una fábrica donde (arman / ensamblan) 24 juguetes por hora. ¿Cuántos (armarán / ensamblarán) en 2 horas si se continúa con el mismo ritmo de trabajo?

A) 12 juguetes.

B) 24 juguetes.

C) 26 juguetes.

D) 48 juguetes.

Respuesta correcta:	Porcentaje elección opción **A:**	Porcentaje elección opción **B:**	Porcentaje elección opción **C:**	Porcentaje elección opción **D:**	Porcentaje de omisión:
D	10%	18%	17%	48%	6%

Figura 4. Problema TERCE de tercer grado.
Fuente: (Flotts, M. Paulina et al.: 2016ª, 38).

Veamos otro ejemplo.
El enunciado del problema se puede postular de la siguiente manera:

Matías visitó la fábrica y en la fábrica se arman en una hora 24 juguetes, entonces trabajando la fábrica 2 horas cuántos juguetes se ensamblarán.

($\boldsymbol{n}$R$\boldsymbol{f}$ & ($\boldsymbol{f}$R$\boldsymbol{j}$ & $\boldsymbol{f}$R($\boldsymbol{r}$ & $\boldsymbol{h}$) = ($\boldsymbol{r}$ & $\boldsymbol{h}$)R($\boldsymbol{q}$ & $\boldsymbol{j}$)) → ($\boldsymbol{f}$R$\boldsymbol{j}$ & 2 x ($\boldsymbol{f}$R($\boldsymbol{r}$ & $\boldsymbol{h}$)) = $\boldsymbol{x}$)

Las variables son:
1) Matías.

Existe un ***n***, tal que ***n*** se llama Matías, (∃***n***) (M***n***); siendo H la clase de los humanos, R(***n*** ∈ H & M***n***) = {***n***, H}

2) La fábrica.

Existe un ***f***, tal que ***f*** es una fábrica, (∃***f***) (C***f***): siendo O la clase de los objetos materiales, R (***f*** ∈ O & C***f***) = {***f***, O}

3) El concepto "juguete".

Existe un ***p***, tal que ***p*** es un juguete, (∃***p***) (J***p***), siendo O la clase de los objetos materiales, podríamos postular la referencia de *p* como R (*p* ∈ O & J*p*) = {*p*, O}

4) El cardinal 24.

Existe un *q* **y** *q* es un número y equivale a 24, (∃*q*) (N*q*. *q* = 24), si denotamos M como el mundo de las matemáticas, R (*q* ∈ M & N*q*) = {*q*, M}

5) El cardinal 1.

Existe un *r* y *r* es un número y equivale a 1, (∃*r*) (N*r* . *r* = 1), si denotamos M como el mundo de las matemáticas, R (*r* ∈ M & N*q*) = {*r*, M}

6) El constructo "hora".

El término "hora" es un constructo, así existe algún *h* y *h* es un constructo, (∃*h*) (C*h*), si F es el mundo de la Física R (*h* ∈ F & C*h*) = {*h*, F}

7) La incógnita *x*.

Existe un x y x es un número, $(\exists x)$ (Nx), si representamos a M como el mundo de las matemáticas, $R(x \in M \& Nx) = \{\boldsymbol{x}, M\}$

Las relaciones son;
1) Matías visitó la fábrica.

La relación que existe entre Matías y la fábrica es que el primero la visitó, así expresamos esta relación con el nRf, en donde ***n*** es Matías, visitó (R) f la fábrica

2) La relación de que en la fábrica se arman los juguetes.

La relación que existe entre la fábrica y juguete, se debe a que la primera los arma, así expresamos esta relación con el fRj en donde f es la fábrica, arma (R) j juguetes.

3) La relación que existe entre la fábrica y la hora de trabajo.

La relación que existe entre la fábrica y la hora de trabajo, es que la primera trabaja 1 hora, así expresamos esta relación con el $fR(r \& h)$ en donde f es la fábrica, trabaja (R) (r & h) 1 hora.

4) La relación que existe entre la hora de trabajo y la cantidad de juguetes.

La relación que existe entre la hora de trabajo y la cantidad de juguetes, es que la primera trabajando 1 hora, los ensambla, así expresamos esta relación con el $(r \& h)R(q \& j)$ en donde $(r \& h)$ 1 hora, ensambla (R) $(q \& j)$ 24 juguetes.

Aplicando la fórmula de nuestro índice de complejidad ontológica

$$CP= \frac{\text{n° de variables de predicados}}{\text{n° de relaciones entre variables}} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Obtenemos el valor de 1,75. Este valor denota que este problema es relativamente más complejo que el anterior.

Existe una relación directa entre las variables y sus relaciones en cuanto a que la complejidad entre estas determina la dificultad del problema matemático a resolver. Si esto ya es así, existe un problema aún mucho más básico que consiste en identificar esas variables y esas relaciones dentro del contexto del enunciado lingüístico del problema. Primero, antes que nada, el niño debe poseer la competencia de comprender correctamente la construcción de las frases lingüísticas y de ahí tener la competencia para aislar las variables y sus respectivas relaciones, solo dado estos pasos satisfactoriamente, se podrá pasar a plantear una solución en el lenguaje matemático.

El TERCE también evaluó las competencias lingüísticas de nuestros niños de tercer grado, en este sentido las estadísticas no hablan muy bien del estado de estos en esta área.

Así tenemos que, entre 16 países evaluados, Paraguay queda ante último en el orden de competencias, muy por debajo de la media para la región (ver Tabla 2 y Figura 5).

Tabla 2. *Puntuaciones promedio en la prueba de lectura de los estudiantes de tercer grado de la primaria por país*

País	Puntaje promedio en la prueba	Error estándar	Comparación con el promedio de países
Argentina	703	4,89	●
Brasil	712	4,99	●
Chile	802	3,96	▲
Colombia	714	8,33	●
Costa Rica	754	3,24	▲
Ecuador	698	4,72	●
Guatemala	678	3,87	▼
Honduras	681	4,14	▼
México	718	3,25	▲
Nicaragua	654	2,84	▼
Panamá	670	3,94	▼
Paraguay	653	4,81	▼
Perú	719	3,91	▲
Rep. Dominicana	614	3,50	▼
Uruguay	728	7,15	▲
Promedio Países[1]	700	1,22	
Nuevo León	733	3,18	▲

Fuente. (Flotts, Manzi, Barrios et al., 2016, p. 32).

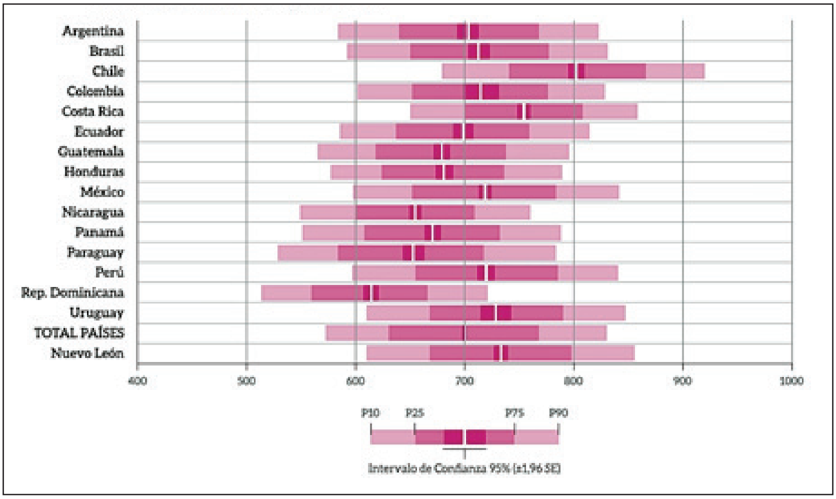


Figura 5. Variabilidad de las puntuaciones en lectura de los estudiantes de tercer grado de primaria de cada país.
Fuente. (Flotts, Manzi, Barrios et al., 2016, p. 32).

En lo que fueron las evaluaciones de Matemáticas, Paraguay queda en el puesto ante último igual que en Lectura (ver Figuras 6 y 7).

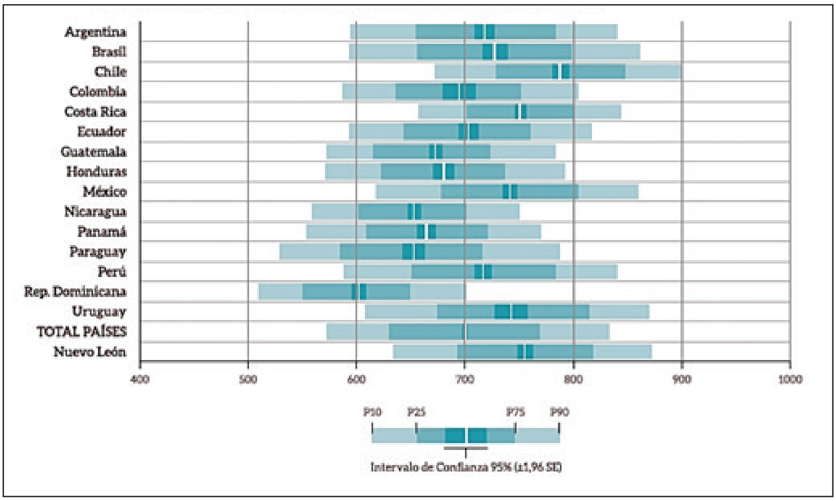


Figura 6. Variabilidad de las puntuaciones en matemáticas de los estudiantes de tercer grado de primaria de cada país.
Fuente. (Flotts, Manzi, Barrios et al., 2016, p. 58).

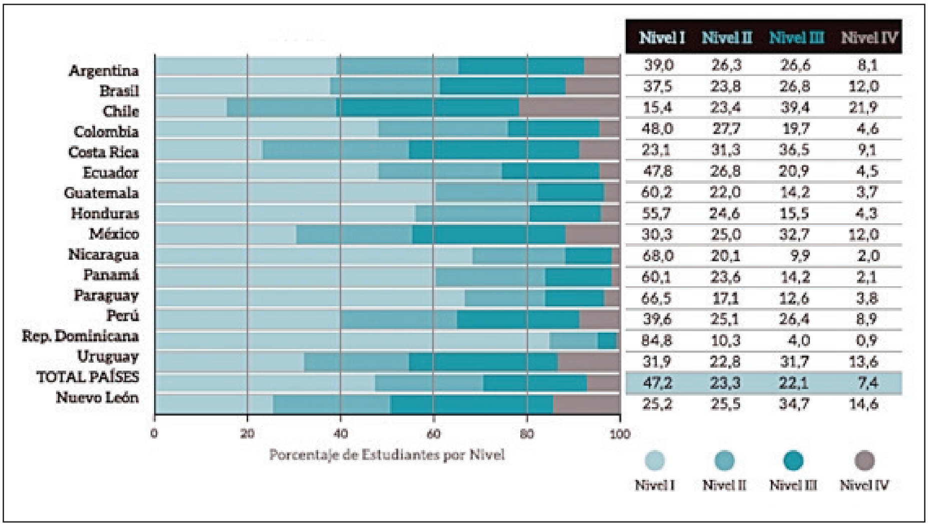


Figura 7. Distribución de estudiantes de tercer grado de primaria por nivel de desempeño en matemática.
Fuente. (Flotts, Manzi, Barrios et al., 2016, p. 60).

Así considerando la cantidad de niños que dentro de estas magras estadísticas han alcanzado el Nivel IV de desempeño en Lectura, el rango o categoría de mayor performance en cuanto competencias, un 6,7% del total, en cifras concretas son unos 261 niños y hacemos un cruzamiento de variables con sus respectivas performances en matemáticas (desagregamos datos para cumplir estos objetivos), encontramos que un 22% de estos obtuvieron la clasificación de Nivel IV, un 51% se ubicaron en el Nivel III, otro 21% en el nivel II y un 6% en el Nivel I (ver Figuras 8 y 9).

3. Discusión y Conclusiones

Los objetos matemáticos y el lenguaje que los referencia tienen sutiles relaciones. Por un lado la habilidad de manejar y comprender las estructuras de la lengua natural conlleva la capacidad de extraer (decodificar) los elementos ontológicos embutidos en él, y desde el hecho de aislar las variables y sus respectivas relaciones, potencialmente se elevan las posibilidades de éxito en los procesos de resolución de problemas matemáticos, por otro lado las competencias matemáticas están asociadas a la capacidad de manipulación y comprensión del lenguaje matemático, que en esencia, estructura función símil a la del lenguaje, lo que es lo mismo decir que el éxito en matemáticas está ligado a la capacidad lingüística de dominar su propio lenguaje formalizado.

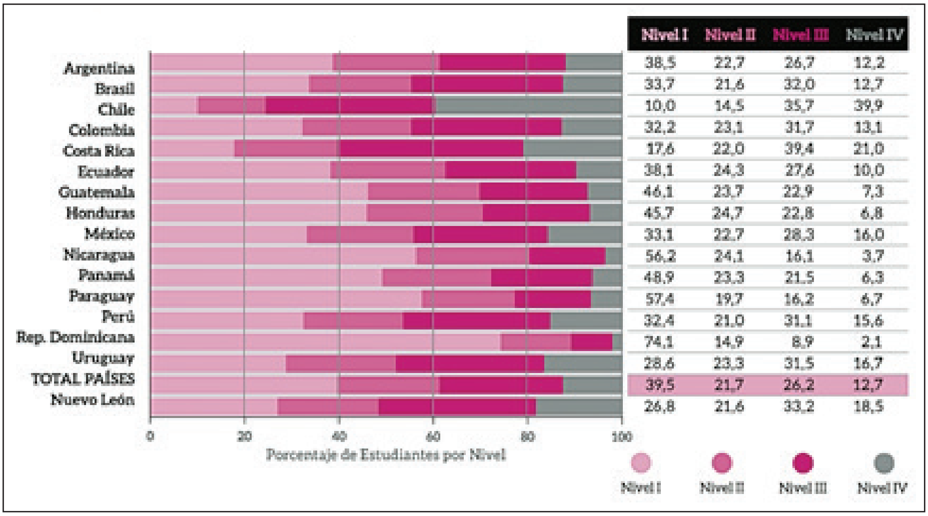


Figura 8. Distribución de estudiantes de tercer grado de primaria por nivel de desempeño en lectura.
Fuente. (Flotts, Manzi, Barrios et al., 2016, p. 34).

En cuanto a los procesos de adquisición, comprensión y uso del lenguaje matemático en el aula escolar, podemos decir que las matemáticas han desarrollado su propio lenguaje, el procedimiento para el paso del lenguaje natural (concreto) al formal (abstracto) en la escuela, se desarrolla mediante etapas sucesivas y progresivas, existe una cierta similitud entre la adquisición del lenguaje matemático y la del lenguaje verbal. Se empieza a comprender o ampliar los significados de verbos, adjetivos, sustantivos etc. En el proceso de enseñanza y la adquisición de estos conceptos en el aula será necesaria una larga serie de ejercicios de perfeccionamiento y precisión matemática de dichas expresiones naturales para que el niño vaya poniendo en práctica lo que hasta entonces era solo una intuición referencial o semántica.

En lo que respecta a cómo debemos entender los objetos matemáticos y sus propiedades en cuanto ontología y su planteo como índice (fórmula matemática) de medición de grado de complejidad de los enunciados de los problemas matemáticos se puede afirmar que la complejidad ontológica hace referencia a la oración gramatical en cuanto a su estructura lógica. Los elementos o variables componentes de las proposiciones y sus predicados están relacionados entre sí, estos hechos hacen que se puedan categorizar en grados de complejidad según el menor o mayor número de relaciones que se encuentren entre las variables que componen los predicados. La capacidad o competencia de asociar elementos, en menor o mayor número de relaciones, implica operaciones de mayor alcance cognitivo en el niño.

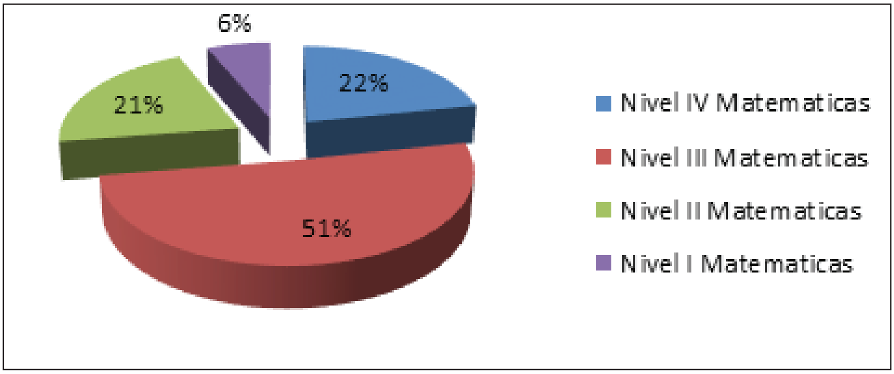


Figura 9. Niños con Nivel de desempeño IV en Lectura y su distribución en los distintos Niveles de desempeño en Matemáticas
Fuente: elaboración propia.

Al interrogante de buscar el estado en que se encuentran las competencias lingüísticas de Lectura y las competencias asociadas con la habilidad de resolución de problemas de matemáticas en escolares de Paraguay que participaron de las pruebas TERCE, a sabiendas de que existe una fuerte correlación entre las competencias lingüísticas de Lectura y sus competencias asociadas con la habilidad de resolución de problemas de matemáticas, agrupando los niveles IV y III de competencia matemática de los niños paraguayos, encontramos que unos 180 niños -el 73%- del total alcanzaron el Nivel IV en Lectura, esto induce la afirmación de que los niveles superiores de competencia matemática están asociados a los niveles superiores de competencia lectora (lenguaje).

El índice de complejidad ontológica es un instrumento que cuantifica -a partir de las variables o referentes y de las relaciones que se dan entre estos- el nivel de complejidad de los enunciados lingüísticos de los problemas matemáticos típicos escolares. Se puede usar para seleccionar o clasificar ejercicios propuestos a los escolares, según la habilidad que esgriman estos en el nivel en que se encuentren. Al basarse la cualificación de los ejercicios a la cantidad de referentes y relaciones-contenido ontológico- entre estos de los enunciados lingüísticos de problemas de matemáticas escolares, se proporciona otra perspectiva para la labor pedagógica en el aula.

Referencias

Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica.

Bunge, M. (1974a). *Semantics I: Sense and reference, Treatise on basic Philosophy*, vol. 1. D. Reidel Publishing Company.

Bunge, M. (1974b). *Semantics II: Interpretation and Truth, Treatise on basic Philosophy*, vol. 2. D. Reidel Publishing Company.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.

Ferrero, L. (2002). *Enciclopedia de la Pedagogía, Artículo: las Matemáticas en la Educación Obligatoria de la Enciclopedia de Pedagogía*. Espasa Calpe.

Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejias, N., & Abarzúa, A. (2016). *Aportes para la enseñanza de la Matemática*. OREALC-UNESCO.

Flotts, M. P., Manzi, J., Giménez, D., Abarzúa, A., Cayuman, C., & García, M. J. (2016). *Informe de resultados TERCE, Logros de Aprendizaje*. UNESCO.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.

Mayer, R. E. (1986). Capacidad matemática. en R. J. Stenberg (Ed.), *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Labor.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, UNESCO. (2019). *Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe*. http://www.unesco.org/new/es/santiago/education/education-assessment-llece/terce/databases/

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. Rodedge and Kegan Paul.

Rey Pastor, J. & Babini, J. (1997a). *Historia de la Matemática. De la Antigüedad a la Baja Edad Media*, vol. 1. Gedisa.

Rey Pastor, J. & Babini, J. (1997b). *Historia de la Matemática. Del Renacimiento a la actualidad*, vol. 2. Gedisa.

Rosales López, C. (1984). El lenguaje matemático en los textos escolares. *Enseñanza & Teaching: Revista interuniversitaria de didáctica*, (2).

Salvador Mata, F. (1984*). Estructuras sintácticas de la lengua escrita en el Ciclo Medio de E.G.B.: análisis evolutivo y diferencial* [tesis doctoral]. UNED.

Simon, J. (1973). *La langue écrite de l'enfant*. Presses Universitaires de France.

Sobre el autor

Víctor Manuel Oxley Insfrán es Doctor en Ciencias de la Educación (Universidad Gran Asunción, UNIGRAN.) Lic. en Filosofía (Universidad Nacional de Asunción). Director del Área de Investigación. UNIGRAN. Ha escrito artículos para revistas periodísticas y académicas, dentro del contexto de la Filosofía Analítica (el análisis del lenguaje a partir de métodos lógicos).

Como citar

Oxley Insfrán, V. M. (2020). Complejidad ontológica y enunciados de problemas matemáticos. *Rev. cient. estud. investig., 9*(1), 17-39. https://doi.org/10.26885/rcei.9.1.17